1/3/16

Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Καμπυλότητα: $\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|} = \left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$

όπου $\frac{ds}{dt} = |\bar{r}|$

Ορισμός

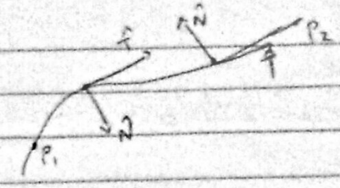
Ορίζουμε σε κάθε σημείο της καμπύλης με $\kappa \neq 0$, το πρωτεύον μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\cancel{\hat{N} = \frac{1}{\kappa} = \frac{d\hat{T}}{ds}}$ $\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds}$

Το διάνυσμα $\hat{N}$ έχει φορά προς τη κοίλη πλευρά της καμπύλης

Για τον υπολογισμό του $\hat{N}$ μοναδιαίο: $\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}\frac{d\hat{T}}{ds}$

$$= \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|\frac{1}{|\vec{v}|}} \frac{d\hat{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|\frac{1}{|\vec{v}|}} \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{|\vec{v}|} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}$$

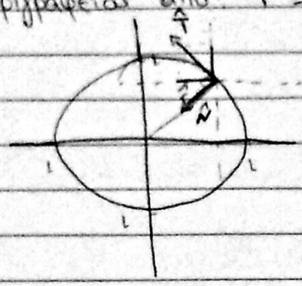
Προφανώς $\hat{N} \cdot \hat{T} = 0$



Παράδειγμα

Να βρεθούν τα $\hat{T}$ μοναδιαίο και $\hat{N}$ μοναδιαίο για την κίνηση που περιγράφεται από: $\vec{r} = \underbrace{\cos(2t)}_{x}\hat{i} + \underbrace{\sin(2t)}_{y}\hat{j}$ $\quad (x^2+y^2=1)$

$0 \le t \le \pi$ (αφαιρέσαμε $0 \le 2t \le$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin(2t)\hat{i} + 2\cos(2t)\hat{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{[-2\sin(2t)]^2 + [2\cos(2t)]^2} = 2$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\sin(2t)\hat{i} + \cos(2t)\hat{j}$$

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|} \quad , \quad \frac{d\hat{T}}{dt} = -2\cos(2t)\hat{i} - 2\sin(2t)\hat{j}$$

$$\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \sqrt{[-2\cos(2t)]^2 + [-2\sin(2t)]^2} = 2$$

$$\Rightarrow \hat{N} = -\cos(2t)\hat{i} - \sin(2t)\hat{j}$$

Πρέπει $\hat{N} \cdot \hat{T} = 0 \Rightarrow +2\sin(2t)\cos(2t) - 2\sin(2t)\cos(2t) = 0$

Η κίνηση η ίδια μας επιβάλλει ένα σύστημα συντεταγμένων. Με τον τρόπο αυτό ορίζω ένα νέο σύστημα συντεταγμένων. Για να περιγράψουμε την κίνηση στο επίπεδο, μας αρκούν τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}$. Για να περιγράψουμε κίνηση στο χώρο, ορίζουμε ένα τρίτο διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο των $\hat{N}, \hat{T}$, το διάνυσμα $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$, και η τριάδα των διανυσμάτων ορίζουν ένα κινούμενο δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Αν $\hat{T} = t_1\hat{i} + t_2\hat{j} + t_3\hat{k}$

$\hat{N} = n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k}$, τότε $\hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \hat{T} \times \hat{N}$

Ιδιότητες

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \underbrace{\frac{d\hat{T}}{ds}\times\hat{N}}_{} + \hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds} = \vec{0} + \hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} \parallel \hat{N} \quad , \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = \frac{d\hat{N}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\hat{N}}{dt}$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\frac{d\hat{B}}{ds}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\hat{T}$, $\frac{d\hat{N}}{ds}$

Άρα και στο $\hat{B}$, δηλαδή $\frac{d\hat{B}}{ds} \parallel \hat{N}$

Άρα είναι παράλληλα.

Θέτουμε $\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$, το "$-$" είναι θέμα σύμβασης

και ορίζουμε τη στρέψη τ ως: $\tau = -\hat{N}\cdot\frac{d\hat{B}}{ds}$

Παρατηρήσεις

1) Η καμπυλότητα κ στο χώρο είναι πάντα θετική

2) Η στρέψη τ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές, θετικές ή αρνητικές

3) Η καμπυλότητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο στρέφεται το κάθετο επίπεδο, καθώς το σωματίδιο διανύει την τροχιά του

4) Η στρέψη είναι ο ρυθμός με τον οποίο το συνεφαπτόμενο επίπεδο στρέφεται περί τον άξονα του $\hat{T}$ μοναδιαίο. Μετρά πόσο περιελίσσεται η καμπύλη

Παράδειγμα

Να βρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη της έλικας:

$\vec{r}(t) = (a\cos t)\hat{i} + (a\sin t)\hat{j} + (bt)\hat{k}$, $a, b \geq 0$, $a^2+b^2 \neq 0$

Λύση

Χρειάζομαι $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t)\hat{i} + (a\cos t)\hat{j} + b\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)\hat{i} + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)\hat{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)\hat{i} + \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)\hat{j}$$

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|} = \frac{\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)\hat{i} - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)\hat{j}}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}} = \cancel{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}(\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j})}$$

$$= -(\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j})$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[b\sin t\,\hat{i} + (-b\cos t)\hat{j} + a\hat{k}\right]$$

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{\frac{d\hat{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\hat{B}}{dt} \Rightarrow \tau = -\hat{N}\frac{dB}{ds}$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων οφείλω να χρησιμοποιήσω τα διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$. Ξέρω ότι $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\hat{T}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|\hat{T}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\hat{T}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{T}}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}\frac{d\hat{T}}{dt} = \left(\text{γνωρίζω ότι } \hat{N} = \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|} = \frac{d\hat{T}}{ds}\right)$$

$$= \frac{ds}{dt}k\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\hat{N}$$, τελικά

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$$

Ορίζουμε ως επιτρόχιο επιτάχυνση $a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ και ως κεντρομόλο επιτάχυνση $a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k|\vec{v}|^2$

Το μέτρο: $|\vec{a}|^2 = |a_N|^2 + |a_T|^2 = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2$

Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ότι $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{T}$ και $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\underbrace{\hat{T}\times\hat{T}}_{0} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\underbrace{\hat{T}\times\hat{N}}_{\hat{B}} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{a} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\hat{B}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}\times\vec{a}| = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = k|\vec{v}|^3 \Rightarrow k = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι αν $\vec{v}\times\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε:

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}, \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Συνολικά για το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ορίζουμε μια ταχύτητα $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$. Από την ταχύτητα ένα μοναδιαίο $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, ένα δεύτερο μοναδιαίο $\hat{N} = \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{1}{k}\frac{d\hat{T}}{ds}$

και $\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N}$

Ορίσαμε μια καμπυλότητα $k = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{dt}\cdot\hat{N} = -\frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\hat{B}}{dt}\hat{N} \quad \text{και} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{T} + k|\vec{v}|^2\hat{N}$$

Παράδειγμα

Κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{r}(t) = (r\cos t)\hat{i} + (r\sin t)\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\sin t\,\hat{i} + r\cos t\,\hat{j}$$

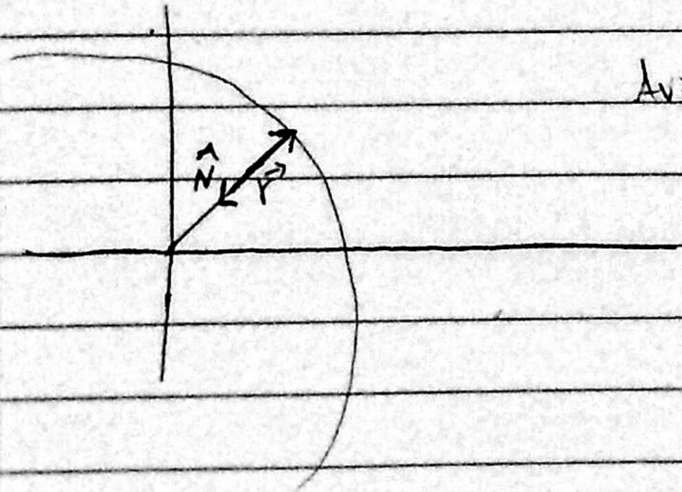
$$|\vec{v}| = r \quad , \quad \hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j} \quad , \quad \left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = 1 \Rightarrow \hat{N} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}$$

$$\left.\begin{cases} \hat{T} = -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} \\ \hat{N} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j} \end{cases}\right\} \xrightarrow[\text{προς } \hat{i},\hat{j}]{\text{λύνουμε ως}} \begin{aligned} \hat{i} &= -\sin t\,\hat{T} - \cos t\,\hat{N} \\ \hat{j} &= \cos t\,\hat{T} - \sin t\,\hat{N} \end{aligned}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} = \cos t\,(-\sin t\,\hat{T} - \cos t\,\hat{N}) + \sin t\,(\cos t\,\hat{T} - \sin t\,\hat{N})$$

$$= -\hat{N}$$



Αντίστοιχα $\hat{\theta} = \hat{T}$